ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES ARTS § INDUSTRIES TEXTILES-ROUBAIX I977

Concours Ière année. Mathématiques (4 h)

I On considère l'équation différentielle $4xy'' + 2y' - y = 0$ (E) où y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x.

1° Déterminer une solution particulière $y_o(x)$ de (E) sous la forme d'une série entière que l'on sommera et dont on déterminera le rayon de convergence.

2° On effectue le changement de fonction $y(x) = z(x) \cdot y_o(x)$

Déterminer l'équation différentielle (E_1) vérifiée par z(x).

Déterminer la solution générale de (E_1) et en déduire la solution générale de (E)

II On considère la matrice d'ordre n.

$$A_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & a & a & \ldots & a & a \\ b & \alpha_2 & a & \ldots & a & a \\ b & b & \alpha_3 & \ldots & a & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b & b & \ldots & b & \alpha_{n-1} & a \\ b & b & \ldots & b & b & \alpha_n \end{pmatrix}$$

a, b, α_i étant des nombres réels ou complexes $\forall i = 1, 2, \ldots n$

On désigne par D(An) le déterminant de An.

1° On pose $f(x) = (\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)\ldots\ldots(\alpha_n - x)$

Montrer que :

$$D(An) = \frac{b\,f(a) - a\,f(b)}{b - a} \quad \text{si } a \neq b$$

$$D(An) = f(a) - a\,f'(a) \quad \text{si } a = b$$

2° Calculer les valeurs propres de $A_n(o, o, \ldots o)$

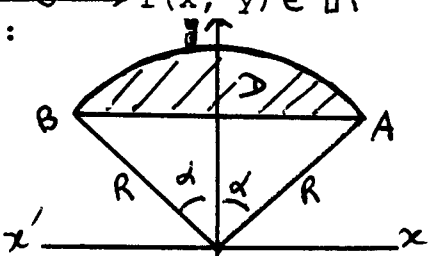
Etudier les cas particuliers suivants : a = b

et $b = \bar{a}$ (on posera $a = \rho e^{i\theta}$)

III Etant donnée une fonction f : $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x, y) \in \mathbb{R}$ définie continue, on considère l'intégrale double :

$$J = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy$$

où D est le domaine hachuré et AB un arc de cercle.



.../...

1° Déterminer les bornes d'intégration pour le calcul de $\mathcal{J}$

a) en coordonnées cartésiennes (2 méthodes)

b) en coordonnées polaires.

2° On considère une plaque homogène, limitée par le domaine D.

Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe x'ox. On exprimera le résultat en fonction de la masse M de la plaque et de l'angle α .

IV Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit f_n fonction de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos t)^n \cdot e^{x\cos t}\, dt$$

1º a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x f_2(x) + f_1(x) - x f_0(x) = 0$

b) Trouver une relation entre $f_n(0)$ et $f_{n-2}(0)$ pour $n \geqslant 2$ et en déduire $f_n(0)$

2° a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, t \in [0\ 2\pi]$

$$e^{x\cos t} = e^{x_0\cos t} + (x-x_0)\cos t\, e^{x_0\cos t} + (x-x_0)\,\varepsilon(x,t)$$

où $|\varepsilon(x,t)| \leqslant \frac{|x-x_0|}{2}\, e^{|x_0|+|x|}$

b) En déduire que f_0 peut s'écrire

$$f_0(x) = f_0(x_0) + (x-x_0) f_1(x_0) + (x-x_0)\,\alpha(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

où $\alpha(x)$ satisfait à $|\alpha(x)| \leqslant \frac{|x-x_0|}{2}\, e^{|x_0|+|x|}$

c) En déduire que f_0 est dérivable et admet pour dérivée f_1

d) Montrer, de la même manière, que f_n est dérivable et admet pour dérivée f_{n+1}

Montrer que f_0 admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 et donner ce développement.

3° a) Montrer que, pout tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ch}(x\cos t)\, dt \quad \text{et} \quad f_1(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \operatorname{sh}(x\cos t)\, dt$$

b) En déduire, pour tout $x \geqslant 0$, les inégalités

$$f_0(x) \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ch}(x\cos t)\, dt \geqslant \frac{2}{3}\operatorname{ch}\frac{x}{2}$$

$$f_1(x) \geqslant \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos t \operatorname{sh}(x\cos t)\, dt \geqslant \frac{1}{3}\operatorname{sh}\frac{x}{2}$$

c) Etudier les variations, les branches infinies et tracer le graphe de f_0 .

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail